Санкт-Петербургский Государственный университет
Физический Факультет

Выпускная бакалаврская работа студента 409
группы физического факультета
Смелкова Кирилла Владимировича

"Об оценках норм полугрупп операторов в терминах резольвенты генератора полугруппы"

Научный руководитель: доцент	М.М. Фаддеев
Рецензент: младший научный сотрудник	А.В. Киселев

СПб
2000

Введение

Данная работа посвящена рассмотрению полугрупп операторов. Пусть $T : H \to H$ — огранниченный оператор действующий в Гильбертовом пространстве H. Набор $\{T^n\}, n \geq 1$,построенный из его положительных степеней, является дискретной полугруппой с генератором T (закон умножения: $T^n T^m = T^{n+m}$).

Часто бывает полезно знать порядок роста элементов T^n. Так например критерий подобия оператора T некоторому унитарному выражается в том, что две полугруппы $\{T^n\}$ и $\{T^{-n}\}$ должны быть одновременно ограничены:

$$\|T^n\| \leq C, \quad \forall n \in Z$$

Небезынтересным оказывается также случай растущих полугрупп.

Наложение тех или иных условий на резольвенту генерирующего оператора ограничивает рост полугруппы. Так например, когда T — сжатие, то есть $\|T\| \leq 1$ условие

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{C}{1-|\lambda|}, \quad |\lambda| \leq 1$$

влечет за собой ограниченность полугруппы $\{T^{-n}\}, n \geq 1$ (и тем самым устанавливает подобие оператора T унитарному), а условие

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|-1}, \quad |\lambda| \geq 1 \qquad (*)$$

для произвольного оператора с необходимостью дает оценку роста:

$$\|T^n\| \leq C(n+1)$$

Примечательным является тот факт, что в случае Банахова пространства такой рост является точным, то есть существует оператор удовлетворяющий условию $(*)$ и растущий линейно (смотри [1]).

В работе исследуется вопрос о связи роста полугруппы и некоторых простых условий на резольвенту генерирующего оператора.

Анализируются условия, позволяющие задавать рост

1) линейно $\quad \|T^n\| \leq C(n+1)$

2) с показателем $\frac{1}{2}$ $\quad \|T^n\| \leq C(n+1)^{\frac{1}{2}}$

3) ограниченно $\quad \|T^n\| \leq C$

4) суммируемо $\quad \sum_{0}^{\infty} \|T^n\| \leq C$

Также проводится параллель с непрерывными полугруппами.

Операторы конечного роста

Рассмотрим операторы T, которые будем называть операторами *конечного роста*, то есть такие, что

$$\|T^n\| \leq C, \quad n \geq 1 \tag{1}$$

При выполнении условия (1), используя разложение резольвенты по степеням оператора, получаем:

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|-1}, \quad |\lambda| > 1 \tag{2}$$

Действительно, при $\lambda \geq 1$

$$(T-\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I + \frac{T}{\lambda} + \frac{T^2}{\lambda^2} + ...)$$

что приводит к оценке

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq C\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|^i} = \frac{C}{|\lambda|-1}$$

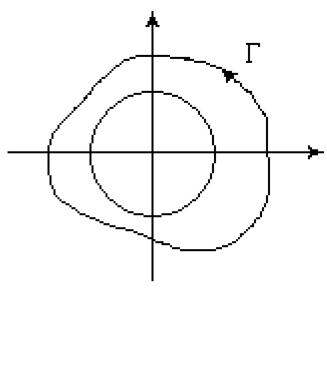
Часто последнее условие является более лёгким для проверки по сравнению с условием (1). Возникает вопрос о связи роста резольвенты и норм оператора, то есть когда из условия (2) следует (1).

С помощью интеграла Рисса (смотри [6])легко показать, что условие (2) даёт линейную оценку роста T:

$$\|T^n\| \leq Ce(n+1), \quad n \geq 1 \tag{3}$$

действительно

$$T^n = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \lambda^n (T-\lambda)^{-1} d\lambda$$



Пусть Γ – окружность радиуса $r > 1$. Тогда получим:

$$\|T^n\| \leq \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{C_r} |\lambda|^n \|(T-\lambda)^{-1}\| d|\lambda| \leq C\frac{r^{n+1}}{r-1}$$

положим $r = \frac{n+1}{n}$ - этот выбор даёт оценку

$$\|T^n\| \leq C(1+\frac{1}{n})^n(n+1) \leq Ce(n+1)$$

что доказывает наше утверждение.

Дифференцируя $(n-1)$ раз резольвенту из (1) приходим к более сильному по сравнению с (2) условию:

$$\|(T-\lambda)^{-n}\| \leq \frac{C}{(|\lambda|-1)^n}, \quad n \geq 1 \tag{4}$$

Которое ограничивает рост оператора уже коренным образом:

$$\|T^n\| \leq C\sqrt{2\pi(n+1)}, \quad n \geq 1 \tag{5}$$

Покажем это: действуя по аналогии с рассмотренным выше случаем представим оператор интегралом Рисса:

$$T^n = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \lambda^n (T-\lambda)^{-n} d\lambda$$

(Γ – тот же, что и предыдущем случае)

Используя тождество $\frac{d^n}{d\lambda^n}(T-\lambda)^{-1} = \frac{(T-\lambda)^{-n}}{n!}$ произведем интегрирование по частям:

$$T^n = \frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{2\pi i(2n)!} \oint\limits_{\Gamma} \lambda^{2n}(T-\lambda)^{-n} d\lambda$$

далее следует оценка нормы:

$$\|T^n\| \leq \frac{(n!)^2}{2\pi(2n)!} \oint\limits_{C_r,\, r>1} \frac{C|\lambda|^{2n}}{(|\lambda|-1)^n} d|\lambda| = \frac{Cn!r^{2n+1}}{(2n)!(r-1)^n}$$

подставляя в качестве r значение $\frac{2n+1}{n}$, а также используя аппроксимацию Стирлинга:

$$n^n e^{-n}\sqrt{2\pi(n+1)} \geq n! \geq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

приходим к оценке:

$$\|T^n\| \leq \frac{n^{2n} 2\pi(n+1)}{(2n)^{2n}\sqrt{2\pi n}} (\frac{n}{n+1})^n (\frac{2n+1}{n})^{2n+1} =$$

$$= C\sqrt{2\pi(n+1)}\sqrt{\frac{2\pi(n+1)}{4\pi n}} \frac{(\frac{n}{n+1})^n(\frac{2n+1}{n})^{2n+1}}{2^{2n}} \leq 4eC\sqrt{2\pi(n+1)},$$

что доказывает наше утверждение.

Условие коренного роста (5) ограничивает рост оператора вдое по сравнению с (3), но всё ещё не позволяет утверждать ограниченность степеней.

В то же время для непрерывных полугрупп такой проблемы нет: теорема Хилля-Йосиды гласит, что для ограниченного оператора A следующие условия эквивалентны (смотри [1])

$$1)\ \|e^{tA}\| \le C, \quad t > 0$$

$$2)\ \|(A-\lambda)^{-n}\| \le \frac{C}{(Re\lambda)^n}, \quad n \ge 0, \quad Re\lambda > 0$$

Создаётся впечатление, что природа такого различия содержится в дискретности полугруппы $\{T^n\}$.

Посмотрим на проблему с этой позиции. Из условия конечного роста (1) устанавливаем:

$$\|e^{zT}\| \le Ce^{|z|} \tag{6}$$

Полагая $z = te^{i\theta}$ приходим к следующему условию

$$\|e^{t(e^{i\theta}T-I)}\| \le C, \quad t > 0, \forall\theta \tag{7}$$

$e^{i\theta}T - I$ является генератором непрерывной полугруппы и, стало быть, мы можем воспользоваться теоремой Хилля-Йосиды. Так получаем (7) $\Leftrightarrow$ (6) и следовательно можно рассматривать связь между условиями (6) и (7). Вопрос об этом сравнении сводится к анализу связи между ростом функции и убыванием её тейлоровских коэффициентов.

Опять используя интегральное представление оператора имеем:

$$\frac{1}{n!}T^n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma \frac{e^{zT}}{z^{n+1}}dz$$

отсюда

$$\|T^n\| \le \frac{n!}{2\pi}\oint\limits_\Gamma \frac{Ce^{|z|}}{|z|^{n+1}}d|z|$$

Выбирая в качестве Γ окружность радиуса r получим:

$$\|T^n\| \le \frac{n!Ce^r}{r^n}$$

подстановка $r = n$ влечёт за собой:

$$\|T^n\| \le \frac{n!Ce^n}{n^n} \le \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi(n+1)}}{n^n}C = C\sqrt{2\pi(n+1)}$$

что снова приводит нас к условию коренного роста (5).

Подведём итоги: пусть T - ограниченный оператор в Гильбертовом пространстве. Тогда верны следующие импликации

$$\begin{aligned} &1)\ (1) \Rightarrow (4) \\ &2)\ (4) \Leftrightarrow (6) \\ &3)\ (4), (6) \Rightarrow (5) \end{aligned}$$

Приведём также один способ описания операторов который оказывается полезным при исследовании операторов конечного роста.

Обозначим через $Y(\lambda, T)$ аппроксимацию Йосиды оператора T

$$Y(\lambda, T) := \lambda T (T - \lambda)^{-1} \quad (\lambda \text{ вне спектра } T) \tag{8}$$

Очевидно следующее равенство

$$(T - \lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} Y(\lambda, T)$$

которое говорит о том, что знание аппроксимации Йосиды позволяет построить резольвенту и наоборот.

Следующее утверждение оправдывает введение этого нового объекта

Утверждение: нижеперечисленные условия эквивалентны

$$\begin{aligned} &1)\ \|T^n\| \le C \quad n \ge 1 \\ &2)\ \|Y^n(\lambda, T)\| \le \frac{C}{(1 - \frac{1}{|\lambda|})^n} \quad n \ge 1, |\lambda| > 1 \end{aligned}$$

доказательство:

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Использую коммутацию оператора со своей резольвентой мы можем представить $Y^n(\lambda, T)$ в виде:

$$Y^n(\lambda, T) = \lambda^n T^n (T - \lambda)^{-n}$$

поскольку, как мы уже знаем, из условия 1) следует ограниченность резольвенты первым порядком, мы можем написать, что

$$\|Y^n(\lambda, T)\| \le \frac{|\lambda|^n C^2}{(|\lambda| - 1)^n} = \frac{C^2}{(1 - \frac{1}{|\lambda|})^n}$$

что доказывает 2)

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$ В этом случае при $|\lambda| > 1$ мы можем записать резольвенту в виде ряда:

$$(T - \lambda)^{-1} = -(I\lambda^{-1} + T\lambda^{-2} + ... + T^n \lambda^{-(n+1)} + ...)$$

и следовательно

$$(T-\lambda)^{-n} = (-1)^n (I\lambda^{-n} + nT\lambda^{-(n+1)} + ...)$$

Учитывая то, что эти ряды сходятся по норме, а также равномерно в любом компакте не содержащем единичный круг, мы можем представить оператор в следующем виде:

$$T^{n+1} = \frac{1}{2\pi i n} \oint_{\Gamma} T^n (T-\lambda)^{-n} \lambda^n d\lambda$$

и используя условие 2) имеем

$$\|T^{n+1}\| \leq \frac{1}{2\pi n} \oint_{C_r} \|T^n (T-\lambda)^{-n}\| |\lambda|^n d|\lambda| = \frac{Cr^{n+1}}{n(n-1)^n}$$

подстановкой $r = n+1$ получаем

$$T^{n+1} \leq C(n+1)\big(1+\frac{1}{n}\big)^n \leq Ce(n+1)$$

что доказывает требуемое.

Если заменить конечность роста более сильным условием:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| \leq B \tag{9}$$

то моментально получим

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq B+1 \quad |\lambda| \geq 1 \tag{10}$$

В отличие от условия линейного роста резольвенты (3), условие (9) коренным образом отличается от прежнего.

Следующее утверждение показывает, что условие вида (10) является критерием для принадлежности полугруппы к (9)

Утверждение: Пусть выполнено (10), тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \leq 6B(B+1) \tag{11}$$

доказательство:

По лемме Банаха о постоянстве дефектного числа оператора $(T-\lambda)$ обратим при $|\lambda| > \frac{B}{B+1}$

И имеем $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \frac{B}{B+1}}$ для $\frac{B}{B+1} < |\lambda| \leq 1$

Ссылаясь на использованные ранее приёмы с интегралом Рисса сразу можем написать

$$T^n = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=R} \lambda^n (T-\lambda)^{-1} d\lambda$$

Получаем при $n \geq 1$ $\|T^n\| \leq B+1$ и для $n \geq B$

$$\|T^n\| \leq e(n+1)\big(\frac{B}{B+1}\big)^n$$

Суммируя $\|T^n\|$ получаем (11). Конец доказательства

Мы заканчиваем этот раздел критерием связывающим поведение степеней оператора с условием на резольвенту (2).

Утверждение: Если средние по Чезаро второго порядка равномерно ограниченны:

$$\forall n \geq 1, \forall \phi \quad \|\frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(n+1-k)(e^{i\phi}T)^k\| \leq C \qquad (12)$$

то выполняется условие на резольвенту (2) то есть

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|-1}, \quad |\lambda| > 1$$

Обратно – пусть резольвента удовлетворяет росту (2). Тогда (12) верно с константой $5C$ (смотри [1]).

Об интегральных оценках резольвенты.

Как известно критерием подобия оператора T унитарному является условие ограниченности всех его степеней. Аналогичное этому условие в терминах интегральных неравенств на резольвенту было получено в [6]: $\forall u \in H$

$$\sup_{r>1}(r^2-1)\int\limits_0^{2\pi}\|T-re^{i\theta}u\|^2 d\theta \leq C\|u\|^2 \qquad (I)$$

$$\sup_{r>1}(r^2-1)\int\limits_0^{2\pi}\|T^*-\frac{e^{i\theta}}{r}u\|^2 d\theta \leq C\|u\|^2 \qquad (II)$$

Каждое из этих условий напрямую не соответствует условию ограниченности полугруппы $\{T^n\}$ (соответственно $\{T^{-n}\}$), однако если всё же рассматривать одно из них (например (I)) как самостотятельное условие, можно сделать определенные выводы относительно поведения резольвенты как функции точки (и следовательно о росте соответствующей полугруппы).

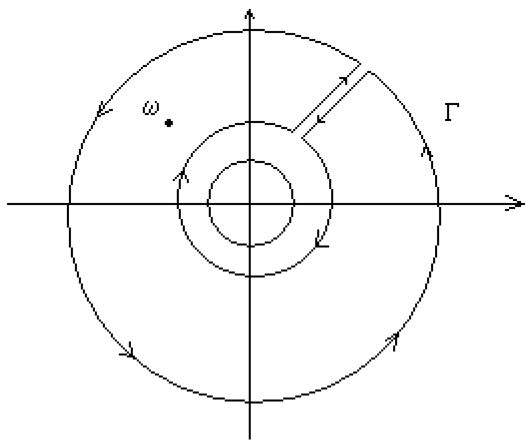
Так из (I) следует, что

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|-1}, \quad |\lambda| > 1$$

то есть уже знакомое нам резольвентное условие обеспечивающее линейный рост полугруппы $\{T^n\}$

Покажем это: рассмотрим функцию $F(\lambda) :=< (T-\lambda)^{-1}u, v >$. Очевидно она аналитична вне единичного круга и следовательно $\forall |w| > 1$ имеем:

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{F(z)}{z-w} dz$$



Интеграл по внешнему контуру исчезает:

$$\oint\limits_{C_R} \frac{|F(z)|}{|z-w|} d|z| \le \Big(\oint\limits_{C_R} |F(z)|^2 d|z|\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\oint\limits_{C_R} \frac{d|z|}{|z-w|^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{C'}{R^2}$$

Следовательно $\forall r < |r| < |w|$

$$F(w) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r} \frac{F(z)}{z-w} dz$$

положим $r = \frac{1+|w|}{2}$. Имеем

$$|< (T-\lambda)^{-1}u, v >| \le \frac{1}{2\pi} \Big(\oint\limits_{C_{\frac{1+|w|}{2}}} |< (T-\lambda)^{-1}u, v >|^2 d|z| \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\oint\limits_{C_{\frac{1+|w|}{2}}} \frac{d|z|}{|z-w|^2} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Что в свою очередь даёт нам

$$\|(T-w)^{-1}\| \le \frac{C}{dist(w, C_1)}, \quad |w| > 1$$

Список литературы

[1] O. Nevanlinna Remarks on the growth of the resolvent operators for power bounded operators, Helsinki University of Technology, 1994

[2] J.A. Van Castern Boundedness properties of resolvents and semigroups of operators Acta Sci. Math. Szeged (1980), vol. 48, N1-2

[3] К. Гоффман Банаховы пространства аналитических функций. Москва, Мир. 1963

[4] П. Халмош Гильбертово пространство в задачах. Москва, Мир. 1970

[5] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь Лекции по функциональному анализу. ИЛ, Москва. 1954

[6] С. Набоко Об условиях подобия унитарным и самосопряжённым операторам. Функциональный анализ и приложения 1984, том 18, вып. 1, стр. 16-27

[7] М. Фаддеев Об операторах сжатия подобных изометрическим. Вестник ЛГУ. 1987, стр 31-36.